

可拓正项几何规划

曹炳元

(汕头大学 数学系, 广东汕头 515063)

摘要: 在可拓集合和可拓凸集的基础上, 提出了可拓值集的可拓凸函数的概念, 建立了可拓正项几何规划的物元模型, 探讨了可拓数学模型的解的性质, 通过解“悖论”, 给出了可化为可拓线性规划的可拓正项几何规划的一种算法.

关键词: 可拓集合; 可拓凸集; 可拓正项几何规划; 悖论

中图分类号: O159

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2001)01-0061-04

现实世界中, 许多现象可用几何规划问题来描述. 然而, 大量的问题往往没有最优解, 甚至连可行解也找不到. 于是, 我们根据实际情况, 或某种经验, 或规则, 将规划问题的约束条件作某种变换, 或让系数作某种波动, 使得不相容的几何规划变为相容的几何规划, 从而得到问题的满意解, 或可拓最优解. 本文仅限于讨论可拓正项几何规划.

1 基本概念

定义 1^[1, 2] 设 U 为论域, k 是 X 到实域 I 的一个映射, 称

$$\tilde{A} = \{(x, y) | x \in U, y = k(x)\}$$

为论域 U 上的一个可拓集合. 我们把论域 U 上的可拓集的全体记为 $E(U)$. $y = k(x)$ 为 $\tilde{A}$ 的关联函数, $k(x)$ 为 x 关于 $\tilde{A}$ 的关联度, 称 $A = \{x | x \in U, k(x) \geq 0\}$ 为 $\tilde{A}$ 的正域; $\bar{A} = \{x | x \in U, k(x) \leq 0\}$ 为 $\tilde{A}$ 的负域; $J_0 = \{x | x \in U, k(x) = 0\}$ 为 $\tilde{A}$ 的零界.

定义 2^[3] 设 $\tilde{A} \in E(U)$, T 是变换, 且 $TU = U$, 称

$$A(T) = \{x | x \in U, k(x) \leq 0, k(Tx) \geq 0\}$$

为 $\tilde{A}$ 的可拓域, $A_+(T) = \{x | x \in U, k(x) \geq 0, k(Tx) \geq 0\}$ 为 $\tilde{A}$ 的稳定域.

定义 3 设 $\tilde{A} \in E(U)$, $\forall x_1, x_2 \in U, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有

$$\tilde{A}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \tilde{A}(x_1) \wedge \tilde{A}(x_2),$$

则称 $\tilde{A}$ 是凸可拓集. 否则, 称 $\tilde{A}$ 为非凸的.

定义 4 $A_a = \{x | \tilde{A}(x) \geq a\}$, $A'_a = \{x | \tilde{A}(x) > a\}$, $a \in (-1, 0]$, 分别称为可拓子集 $\tilde{A}$ 的 a -截集和强 a -截集.

定理 1^[1] 设 $\tilde{A}$ 为凸可拓集 $\Leftrightarrow \forall a \in (-1, 0], A_a$ 为普通凸集.

定义 5 设 $g_i(x) (0 \leq i \leq p)$ 在 $D \subset R^n$ 上定义, 则 $\tilde{A}(g_i(x))$ 是在 $g_i(x)$ 的值域 R^n 上定义的可拓值集.

收稿日期: 2000-06-30

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(990778); 汕头大学“211工程”重点学科建设项目.

作者简介: 曹炳元(1951), 男, 教授; 主要研究方向: 几何规划.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

定义 6 设 $\tilde{A}$ 为 $D \subset R^n$ 上的可拓值集, 则 $\tilde{A} = \tilde{A}_i [g_i(x) - 1]$ 是 $g_i(x) - 1 = g'_i(x)$ 关于 $\tilde{A}$ 的可拓约束, 且

$$\tilde{A}_i(x) = \tilde{A}(g'_i(x)) = \begin{cases} 0, & \text{当 } g'_i(x) < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } g'_i(x) \geq 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (1)$$

2 可拓正项几何规划问题

我们将几何规划^[4]舍弃其代数运算的符号, 便构成物元模型, 即成为三元组:

$$M = (P, Q, G), \quad (2)$$

其中, P 表示实体, Q 表示特征, G 表示 P 关于 Q 之间的定量关系. 而这种量值关系, 是用指数多项式来表示的.

如果将式(2)施行物元变换 T , 便有

$$TM = (TP, TQ, TG), \quad (3)$$

我们称式(2)(3)为几何规划的物元变换模型.

如果式(2)是相容的模型, 我们则可用经典的方法求问题的解; 如果式(2)是不相容模型或对立模型, 我们就采用不同的变换 T , 将(2)转换成(3)型的相容模型. 模型(2)或(3)在实际决策时是很理想的工具.

在几何规划的物元模型中, 实体和特征的变换, 是人们创造思维的体现, 它需要定性与定量相结合, 而以定性为主的描述. 而实体与特征之间的关系, 则是物元模型的抽象, 其特定的形式为

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{g}_0(x) \\ \text{s. t.} \quad & \tilde{g}_i(x) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq p), \\ & x > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\tilde{g}_i(x) = \sum_{k=1}^{j_i} v_{ik}(x) = \sum_{k=1}^{j_i} \tilde{C}_{ik} \prod_{l=1}^m x_l^{y_{ilk}} \quad (0 \leq i \leq p) \quad (5)$$

为指数多项式, 它是可拓正项式, 这里 $\tilde{C}_{ik}$ 表示可拓系数和可拓常数. 我们称(4)为可拓正项式几何规划.

一般定义为:

定义 7 设 $\tilde{A}_0(x)$ 是定义在 R 上的目标集, $\tilde{A}_i(x)$ 是定义在 R^p 上的约束集, 且有

$$\max_{x \in R^+} \left\{ \tilde{H}^*(x) = \min_{0 \leq i \leq p} \tilde{A}_i^*(x) \right\}. \quad (6)$$

如果对 $\forall \tilde{A}_i^* \in (-1, 0]$, 而当作用于 T 变换后, $T\tilde{A}_i^* \in [0, 1]$, 则称之为可拓数学规划问题. 如果 $\tilde{A}_i^* = \frac{g_i(x) - M}{m - M}$, 其中 $\tilde{g}_i(x) (0 \leq i \leq p)$ 如上述指数多项式(4), m_i, M_i 为 $\tilde{g}_i(x)$ 的下、上确界, 则(6)称为可拓正项几何规划问题.

定义 8 设 $D \subset R^n$ 是凸集, 若 $\tilde{g}_0(x)$ 是关于 $\tilde{A}^*$ 的可拓凸函数(强可拓凸函数)^[3], $\tilde{g}'_i(x) = \tilde{g}_i(x) - 1 (1 \leq i \leq p)$ 是关于 $\tilde{A}$ 的可拓凸函数(强可拓凸函数), 则称(4)为 $g_0(x)$ 的一个可拓(强可拓)凸规划问题.

定理 2 规划问题(4)是可凸化的可拓正项几何规划.

证明: 作代换 $x_i = e^{z_i} (0 \leq i \leq p)$, 则

$$\tilde{g}_i(x) = \sum_{k=1}^{j_i} \tilde{C}_{ik} \prod_{l=1}^m x_l^{\sum_{k=1}^{j_i} \tilde{C}_{ik} e_{kl}} = \sum_{k=1}^{j_i} \tilde{C}_{ik} e^{\sum_{l=1}^m \tilde{C}_{ik} x_l} = \tilde{G}_i(z),$$

易证它是 z 的可拓凸函数, 由定义 8 知本定理得证.

定义 9 设 $\tilde{S}$ 是定义在 $D \subset R^p$ 上的可拓集, 且 $\tilde{B}(x) = \bigwedge_{1 \leq i \leq p} \tilde{A}_i(x) = \min_{1 \leq i \leq p} \tilde{A}_i(x)$, 则称 $\tilde{S}(x)$ 为关于 $\tilde{A}_i$ 的可拓相容解集.

3 单项可拓正项几何规划及其计算

由于利用几何不等式, 可将可拓正项几何规划化为单项正项可拓几何规划. 本文仅介绍单项正项可拓几何规划. 此只须在(3)中, 令 $J_0 = J_1 = \dots = J_p = 1$, 则式(3)变为

$$\begin{aligned} \min \quad & c_0 \prod_{l=1}^m x_l^{\gamma_{0l}} \\ \text{s. t.} \quad & c_i \prod_{l=1}^m x_l^{\gamma_{il}} \leq b_i \quad (1 \leq i \leq p). \\ & x > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

以下我们研究(3)的等价形式, 只需研究(5)的等价形式.

定理 3 设单项正项可拓几何规划为(5), 则(5) $\Leftrightarrow$ 可拓线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{l=1}^m \gamma_{0l} z_l \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{l=1}^m \gamma_{il} z_l + \ln c_i \leq \ln b_i \quad (1 \leq i \leq p) \end{aligned} \quad (6)$$

且它的可拓满意极小解亦是(5)的可拓满意极小解.

证明 作变换 $z_l = \ln x_l \quad (1 \leq l \leq m)$. 不妨取 $c_0 = 1$, 则有

$$g_i(x) = c_i e^{\sum_{l=1}^m \gamma_{il} z_l}$$

从而(5)化为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{l=1}^m \gamma_{0l} z_l \\ \text{s. t.} \quad & c_i e^{\sum_{l=1}^m \gamma_{il} z_l} \leq b_i \quad (1 \leq i \leq p). \end{aligned} \quad (7)$$

由定理 1 知(6)是可拓凸的, 再由定理 2 知它有可拓满意极小解. 但(7) $\Leftrightarrow$ (6), 而(6) $\Leftrightarrow$ (5), 从而证得定理第 2 个结论成立.

例 1 求解: $\min x_1 x_2 x_3^6 x_4^3$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_4^2 = b_1, \\ & x_1^2 x_2 x_3 x_4^{-1} = b_2, \\ & x_1 x_2 x_3^2 x_4^3 = b_3, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

令 $z_l = \ln x_l \quad (l = 1, 2, 3)$, 问题化为

$$\begin{aligned} \min \quad & (z_1 + z_2 + 6z_3 + 3z_4) \\ \text{s. t.} \quad & z_1 - z_2 - z_3 + 2z_4 = \ln b_1, \\ & 2z_1 + z_2 + 2z_3 - z_4 = \ln b_2, \\ & z_1 + z_2 + 2z_3 + 3z_4 = \ln b_3. \end{aligned} \quad (9)$$

若取 $b_1 = e$, $b_2 = e^6$, $b_3 = e^4$, 最优解为 $z_1 = 2$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, 最优值为 $f = 8$. 但若取 $b_1 = e^2$, $b_2 = e^7$, $b_3 = e^4$, 最优解为 $z_1 = 3$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$, 最优解却减少至 $f = 4$. 这种奇怪的现象, 数学上称之为“悖论”^[6].

如果将可拓常数作可拓变换 T , 即令

$$T(\ln b_i) = \left\{ \ln(b_i + d_i a) \right\} = \left\{ \ln e^{1-d_1 a}, \ln e^{6+d_2 a}, \ln e^{4+d_3 a} \right\},$$

不妨取 $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, 则(9)变为

$$\begin{aligned} & \min(z_1 + z_2 + 6z_3 + 3z_4) \\ & \text{s. t. } z_1 - z_2 - z_3 + 2z_4 \leq 1 + a, \\ & \quad 2z_1 + z_2 + 2z_3 - z_4 \leq 6 + a, \\ & \quad z_1 + z_2 + 2z_3 + 3z_4 \leq 4 + a, \end{aligned}$$

其解为

$$z = B^{-1} \ln b(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+a \\ 6+a \\ 4+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3a \\ 1+2a \end{bmatrix}.$$

但(9)并未要求解非负, 故 z 为问题的最优解, 将其代入目标函数得: $f = 2 - 3a + 6 + 12a + 0 = 8 + 9a$. 只要当 $a \geq 0$ 时, (9)的“悖论”将永远不会发生, 从而(8)的“悖论”也不会发生. 而 a 的取值则依据实际情况而定.

参考文献:

- [1] 蔡文. 物元分析[M]. 广州: 广东高教出版社, 1987. 220-235.
- [2] 蔡文. 物元模型及其应用[M]. 北京: 科学技术文献出版社, 1994. 119-129.
- [3] 曹炳元. 可拓凸集[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 1990, 13(1): 18-23.
- [4] 吴方, 袁云耀. 几何规划[J]. 数学的实践与认识, 1982, (2): 1-2.
- [5] Cao Bingyuan. Fuzzy geometric programming (I)[J]. Int. J. of Fuzzy Sets and Systems, 1993, 53(2): 135-153.
- [6] 曹炳元. 研究 LP* 悖论”的 Fuzzy 集方法[J]. 湖南教育学院学报, 1991, 19(2): 17-22.

Extension Polynomial Geometric Programming

CAO Bing-yuan

(Department and Institute of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063, China)

Abstract: The author develops the concepts of extension convex function in extendable-valued set based on the extension set and extension convex. In addition, the author builds a model of extension polynomial geometric programming and a mathematical model, and discusses solution properties in an extension mathematical model. An algorithm of the programming that is a changeable extension linear programming by the solution of the paradox is obtained.

Key words: extension set; extension convex set; extension polynomial geometric programming; paradox